Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из математике -

Стабилност по Љапунову и Раут-Хурвицов критеријум

Ученик:
Вукашин Михајловић
IVд

Ментор:
др Борислав Гајић

Београд, јун 2020.

Садржај

1 Увод **1**

2 Уводни појмови из линеарне алгебре **3**

2.1 Векторски простори 3

2.2 Матрице 3

2.3 Сопствене вредности и сопствени вектори 4

3 Дефиниције стабилности **6**

4 Љапуновљев директни метод **8**

4.1 Својства дефинитних функција 10

4.2 Теореме Љапунова 11

5 Критеријуми стабилности линеарних система **13**

5.1 Први критеријум 14

5.2 Други критеријум 15

5.3 Примене Раут-Хурвицовог критеријума 21

6 Закључак **25**

Литература **26**

1

Увод

Основе теорије стабилности увео је руски математичар Љапунов 1892. године у својој докторској дисертацији *Общая задача об устойчивости движения* . Од тада, теорија стабилности, као теорија која проучава понашање решења система диференцијалних једначина при малим пертурбацијама почетних услова, пронашла је примене у различтим областима математике.
Још од давнина познато је да стабилним равнотежним стањима одговарају локални минимуми потенцијалне енергије.
Циљ овог рада је да се успостави и уопшти веза између енергије и стабилности равнотеже користећи појам Љапуновљевих функција и решавањем диференцијалних једначина поремећеног кретања која се добијају при малим пертурбацијама. Такође, у овом раду дајемо и доказ Раут-Хурвицовог критеријума,који је сам по себи веома занимљив математички проблем и за оне математичаре чија примарна област интересовања није теорија стабилности, уз помоћ кога лако проверавамо стабилност врло сложених система које је понекад и немогуће егзактно решити. Ефикасност критеријума показује се на крају рада кроз примену у реалним механичким проблемима.

2

Уводни појмови из линеарне алгебре

2.1 Векторски простори

Дефиниција 2.1.1. Векторским простором над пољем K називамо скуп V са операцијама сабирања и множења елементима K која задовољавају следећа својства:

1. $(V, +)$ је Абелова група;
2. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;
3. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ за све $\lambda, \mu \in K$, $\mathbf{a} \in V$;
4. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ за све $\lambda, \mu \in K$, $\mathbf{a} \in V$;
5. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ за све $\mathbf{a} \in V$;

Пример 1. Скуп K^n за произвољно поље K са операцијама дефинисаним као:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

2.2 Матрице

Дефиниција 2.2.1. Матрицом димензије $m \times n$ над пољем K називамо правоугаону таблицу са m врста и n колона и елементима из K. Уобичајено је да се елемент у пресеку врсте i и колоне j означава са a_{ij} па се матрица A записује као:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или скраћено као $A = (a_{ij})$. За матрице се операције сабирања, множења скаларом и множења две матрице дефинишу на следећи начин:

1. Збир матрица A и B једнаких димензија је матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
2. Производ матрице A и скалара $\lambda \in K$ је матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})$
3. Производ матрице $A = (a_{ij})$ димензије $m \times n$ и матрице $B = (b_{jk})$ димензије $n \times p$ је матрица $AB = (c_{ik})$ димензија $m \times p$ чији се елементи добијају по следећој формули

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Пример 2. Није тешко доказати да скуп истодимензионих матрица над неким пољем и са претходно дефинисаним операцијама чини векторски простор над тим пољем. Нама ће бити посебно интересантан случај када је $K = \mathbb{R}$ и $m = n$ тј. простор реалних квадратних матрица (надаље $\mathbb{R}^{n \times n}$). О овим матрицама је најлакше размишљати као о линеарним пресликавањима из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^n$.

2.3 Сопствене вредности и сопствени вектори

Дефиниција 2.3.1. Нека су $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ такви да важи

$$M\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Тада се λ назива **сопствена вредност**, а $\mathbf{v}$ **сопствени вектор** матрице M.

Последица 1. Ако су λ и $\mathbf{v}$ сопствена вредност и сопствени вектор матрице M тада је

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Дефиниција 2.3.2. Нека је λ сопствена вредност матрице M, тада скуп

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} : (M - \lambda I)\mathbf{v} = 0\}$$

зовемо сопственим простором сопствене вредности λ. Није тешко проверити да сопствени простор било које сопствене вредности заиста јесте векторски простор.
Наредне чињенице о сопственим вредностима наводимо без доказа. Нека је λ сопствена вредност матрице M. Тада је:

- $1 + \lambda$ сопствена вредност матрице $I + M$
- $-\lambda$ сопствена вредност матрице $-M$
- $a\lambda$ сопствена вредност матрице aM , $a \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{\lambda}$ сопствена вредност матрице M^{-1}
- λ^n сопствена вредност матрице M^n

Ако матрицу $M - \lambda I$ запишемо као n узастопних стубац-матрица $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}$ а вектор $\mathbf{v}$ као $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ имамо $\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}$, одакле добијамо да су колоне ове матрице линеарно зависне, стога њена детерминанта мора бити 0. С друге стране, познато је да је $det A = 0$ ако и само ако $Ker A \neq 0$. Дакле, нашли смо еквивалентан услов да нека вредност буде сопствена:

$$det(M - \lambda I) = 0.$$

Након развијања детерминанте добијамо полином n-тог степена који се назива **карактеристични полином**.

3

Дефиниције стабилности

Нека је кретање механичког система описано следећим системом диференцијалних једначина:

$$\dot{y_i} = Y_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad (i = 1, ..., n)$$

где су y_i брзине, координате или генерално било које функције ових величина. Ради компактности записа, користићемо запис преко $n\times 1$ матрице $\mathbf{y}^\intercal = [y_1, y_2, ...y_n]$. Растојање између две овакве величине дефинишемо као

$$dist(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_i'|$$

Дефиниција 3.0.1. Кретање динамичког система коме одговара партикуларно решење $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$ тј. $y_i(t) = u_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$ је стабилно по Љапунову ако:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall t > t_0)(dist(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) < \delta \Rightarrow dist(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) < \epsilon)$$

где је t_0 почетни тренутак.
Увођењем смене $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{u}(t)$ добијамо нову једначину:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= X(t, \mathbf{x}) \\ &= Y(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)) - Y(t, \mathbf{u}(t))\end{aligned}$$

Сада се над $\mathbf{x}$ може увести норма $\|\mathbf{x}(t)\| = dist(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))$ Партикуларном решењу $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$ одговара партикуларно решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ и у новим координатама дефиниција стабилности по Љапунову има облик:

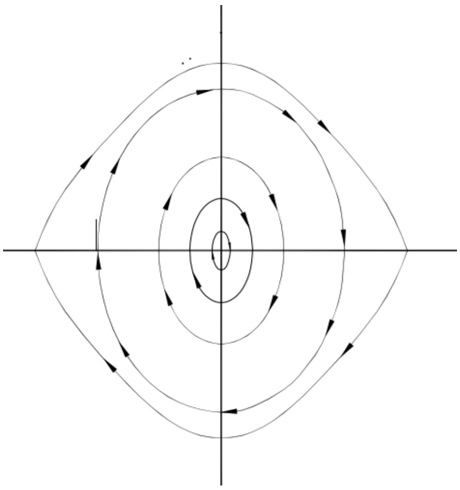
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall t > t_0)(\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon)$$

Стабилност по Љапунову гарантује да се систем за довољно мали почетни поремећај налази унутар неке ϵ-сфере током целог свог кретања. Када захтевамо да у бесконачности систем заврши у равнотежном положају, имамо следећу асимптотску дефиницију стабилности:

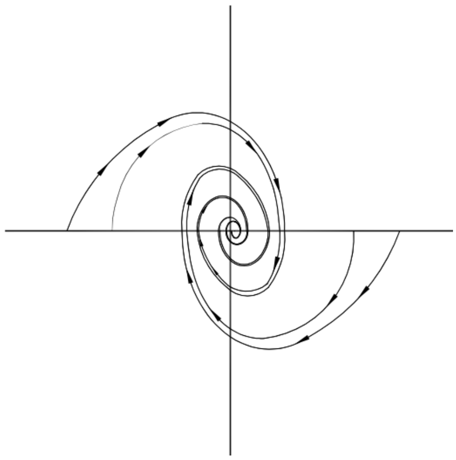
Дефиниција 3.0.2. Кретање које је стабилно по Љапунову и при коме је :

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

називамо асимптотски стабилним. Разлику између ових критеријума је најбоље представити геометријски:



Слика 3.1: Равнотежни положај је стабилан по Љапунову



Слика 3.2: Равнотежни положај је асимптотски стабилан

Посматрамо две путање такозваних репрезентативних тачака. То су тачке које у тренутку t заузимају положај $\mathbf{x}(t)$ у $\mathbb{R}^n$. Обе путање су стабилне по Љапунову , али прва није асимптотски стабилна.

4

Љапуновљев директни метод

У свом раду из 1892. руски математичар Љапунов [1] је представио и доказао низ теорема у којима је на основу неких особина такозваних Љапуновљевих функција система диференцијалних једначина могао да тврди да ли је систем стабилан у Љапуновљевом смислу. Овај метод се назива директним зато што се не ослања на решавање линеарне апроксимације у околини партикуларног решења, већ само на налажење одговарајуће Љапуновљеве функције.

Нека је

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.1}$$

систем диференцијалних једначина где X_i $(i = 1, ..., n)$ не зависе од t, а $\mathbf{x} \equiv 0$ једно његово партикуларно решење. Стабилност решења се посматра у некој околини тачке $\mathbf{0}$:

$$U_h = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < h\}$$

Дефиниција 4.0.1. Нека је $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V(\mathbf{x})$ реална функција дефинисана у датој h околини тачке $\mathbf{0}$. За функцију V кажемо да је позитивно(негативно) дефинитна ако:

1. $V(\mathbf{x})$ је непрекидна и једнозначна на свом домену;
2. $V(\mathbf{0}) = 0$;
3. постоји d-околина U_d тачке $\mathbf{0}$ у којој важи $V(\mathbf{x}) > 0 \quad (V(\mathbf{x}) < 0)$ за $\mathbf{x} \in U_d$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Ако мало ослабимо трећи услов, добијамо једну ширу класу функција које се називају позитивно(негативно) семидефинитне функције.

[1] Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918)

Дефиниција 4.0.2. Нека је $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V(\mathbf{x})$ реална функција дефинисана у датој h околини тачке $\mathbf{0}$. За функцију V кажемо да је позитивно(негативно) семидефинитна ако:

1. $V(\mathbf{x})$ је непрекидна и једнозначна на свом домену;

2. $V(\mathbf{0}) = 0$;

3. постоји d-околина U_d тачке $\mathbf{0}$ у којој важи $V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (V(\mathbf{x}) \leq 0)$ за $\mathbf{x} \in U_d$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Очигледно је да је функција $V(\mathbf{x})$ негативно дефинитна ако и само ако је $-V(\mathbf{x})$ позитивно дефинитна па ћемо се убудуће при изучавању дефинитних функција фокусирати само на позитивне.

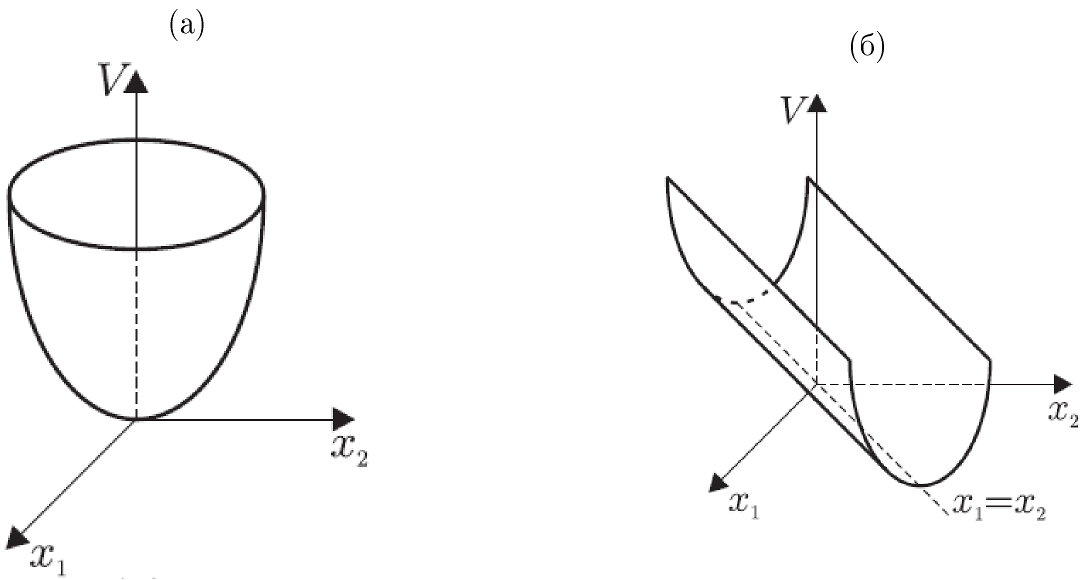
Пример 3. Посматрајмо две функције:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2$$

која је очито 0 само за $x_1 = x_2 = 0$,

$$V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

која је увек ненегативна, али је 0 кад год је $x_1 = x_2$



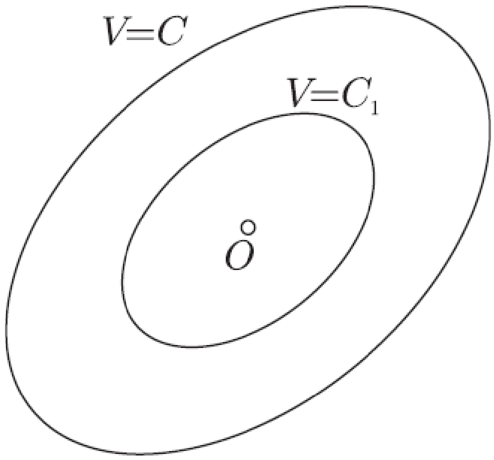
Слика 4.1: Дефинитне и семидефинитне функције: (а) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2$ (б) $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

4.1 Својства дефинитних функција

Лема 4.1. Нека је $V(\mathbf{x})$ дефинитна функција. Све једначине облика

$$V(\mathbf{x}) = C$$

дефинишу затворене хиперповрши у $\mathbb{R}^n$ за довољно мале вредности C.
Доказ: Овде дајемо идеју и врло неформалан доказ и ослањамо се на интуитивну представу о затвореним površima у $\mathbb{R}^3$ јер је формално врло тешко уопште увести појам затворене хиперповрши.
Уочимо μ-сферу $(= \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = \mu\})$ и посматрајмо рестрикцију V_μ функције V на ту сферу. Због компактности сфере знамо да на тој сфери функција V_μ достиже минималну вредност m. Нека је сада $C \leq m$ и посматрајмо рестрикцију V_{OX} функције V на произвољну полуправу OX, где је O координатни почетак, а тачка X је на сфери. Због непрекидности, постоји тачка $\mathbf{x}$ на полуправој OX која задовољава $V(\mathbf{x}) = C$. Како је X била произвољна тачка на сфери, закључујемо да се хиперповрш $V(\mathbf{x}) = C$ налази у потпуности у унутрашњости сфере и свака полуправа кроз O је сече. Овим закључујемо да та површ мора бити затворена. На сличан начин закључујемо да се за $C_1 < C$ површ $V(\mathbf{x}) = C_1$ налази у потпуности унутар површи $V(\mathbf{x}) = C$.



Слика 4.2: Површи $V(\mathbf{x}) = C$

Можемо посматрати и кретање репрезентативне тачке које задовољава почетни систем једначина кретања и за довољно мале померање од равнотежног положаја у сваком тренутку свог кретања се налази у области дефинисаности функције V. Ако је функција V диференцијабилна, испоставља се да је за испитивање стабилности равнотеже врло корисно разматрати њен градијент :

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

као и извод V по времену:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot X_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot X_n =$$
$$= \nabla V \cdot \mathbf{u}$$

где је $\mathbf{u}$ брзина репрезентативне тачке. Оваква интерпретација извода по времену Љапуновљеве функције даје нам добру интуицију о томе када је систем стабилан. Рецимо да смо нашли неку позитивно дефинитну функцију чији је извод по времену строго негативан. Тада је угао између брзине и градијента који је за позитвно дефинитне функције увек усмерен ка спољашости хиперповрши $V(\mathbf{x}) = C$, па је брзина увек усмерена ка унутрашњости површи, тј. тело се креће према површима са мањим вредностима C, па самим тим и тежи равнотежном положају.[2]

4.2 Теореме Љапунова

Теорема 4.1. Ако је за систем једначина кретања (4.1) могуће наћи дефинитну функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену супротног знака од V или је једнак 0, онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ стабилно по Љапунову.

Доказ: Без умањења општости петпостављамо да је V позитивно дефинитна и $\frac{dV}{dt} \leq 0$. За дато позитивно ϵ посматрамо ϵ-околину $U_\epsilon = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\| < \epsilon\}$ и ϵ -сферу, $S_\epsilon = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\| = \epsilon\}$. Због затворености и компактности сфере функција V на њој достиже строго позитивни минимум ξ. Како је $V(\mathbf{0}) = 0$ и V је непрекидна постоји δ-околина тако да важи $\mathbf{x} \in U_\delta \Rightarrow V(\mathbf{x}) < \xi$. Сада је довољно узети да се систем у почетном тренутку t_0 налази унутар δ-околине. Како је V опадајућа функција по времену и у почетном тренутку је $V(\mathbf{x}(\mathbf{t_0})) < \xi$, функција никада не може изаћи из ϵ-околине. □

[2] Овде се ослањамо на интуицију коју имамо у дводимензионалном и тродимензионалном случају, када су у питању спољашње и унутрашње нормале на хиперповрши. Оне су могу формално увести и у вишедимензионалним случајевима.

Теорема 4.2. Ако је за систем једначина кретања (4.1) могуће наћи дефинитну функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену супротног знака од V , онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ асимптотски стабилно.

Доказ: По претходној теореми, за свако ϵ постоји $\delta \leq \epsilon$ тако да ако је систем у неком тренутку у δ -околини, током целог свог будућег кретања ће се налазити у ϵ -околини. Дакле, ако решење није асимптотски стабилно, мора постојати δ'-околина у коју систем никад неће ући. Исто тако, због почетних услова постоји ϵ-околина из које тело никада неће изаћи. Дакле, тело се креће унутар затворене компактне области $\overline{U_\epsilon} \setminus U_{\delta'}$ током целог свог кретања. Како смо извод функције V по времену успели да изразимо само преко њених парцијалних извода по x_i и функција X_i који по почетним претпоставкама не зависе од t, имамо да функција

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot X_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot X_n = V_1(x_1, x_2, ...x_n)$$

достиже свој строго негативни минимум ν на тој затвореној површи. Дакле, $V(\mathbf{x}(\mathbf{t})) \leq V(\mathbf{x}(\mathbf{t_0})) + \nu(t - t_0)$ што је за довољно велико t очито негативно. Контрадикција! □

Функција V која задовољава услове неке од претходних теорема назива се **Љапуновљева функција**. Претходне две теореме су нам давале услове при којима су неки системи стабилни. Следећа теорема даје услове при којима су решења нестабилна.

Теорема 4.3. Ако је за једначине кретања (4.1) могуће наћи функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену $\frac{dV}{dt}$ дефинитна функција, а V је недефинитна функција или дефинитна функција истог знака као $\frac{dV}{dt}$ онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ нестабилно.

Доказ: Одаберимо неко ϵ тако да је $\frac{dV}{dt}$ дефинитно (без умањења општег позитивно) на U_ϵ. Претпоставимо да за такво ϵ постоји δ тако да $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ током целог кретања. Како V није негативно дефинитна, постоји почетни положај $\mathbf{x}(t_0)$ тако да $0 < \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ и $V(\mathbf{x}(t_0)) \geq 0$. Претпоставимо да је баш то почетни положај нашег система. Како је V строго растућа непрекидна функција, мора постојати μ тако да се систем никада не нађе у U_μ-околини. Због непрекидности, постоји U_μ тако да $\mathbf{x} \in U_\mu \Rightarrow V(\mathbf{x}) < V(\mathbf{x}(t_0))$, па како V расте са временом, систем никада не може бити у U_μ околини. Дакле, систем је све време у затвореној компактној области $\overline{U_\epsilon} \setminus U_\mu$. Слично као у претходној теореми, $\frac{dV}{dt}$ достиже позитивни минимум ν па је $V(\mathbf{x}(\mathbf{t})) \geq V(\mathbf{x}(\mathbf{t_0})) + \nu(t - t_0)$ па ће систем за довољно велико t сигурно изаћи из U_ϵ. Дакле, систем није стабилан. □

5

Критеријуми стабилности линеарних система

Испоставља се да је у механици јако важно изучавање система у околини њихових равнотежних положаја. Неретко се у околини својих равнотежних положаја системи могу линеаризовати тј. апроксимирати диференцијалном једначином облика

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Може се доказати да је општи облик решења једне овакве матричне диференцијалне једначине

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u_2} + \cdots c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{u_n}$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ сопствене вредности, а $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \cdots \mathbf{u_n}$ одговарајући сопствени вектори матрице A [1]. Како је матрица A реална и карактеристични полином мора имати реалне коефицијенте па његове комплексне корене можемо упарити са одговарајућим конјугатима. Такође, из $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ конјуговањем видимо да је управо $\bar{\mathbf{u}}$ сопствени вектор од $\bar{\lambda}$ (један од сопствених вектора, али можемо претпоставити да се баш он појављује у линеарној комбинацији). Без умањења општег можемо и претпоставити $|\mathbf{u_i}| = 1, \forall i = 1, \cdots, n$. Сада можемо упарити сабирке уз $\lambda = p + iq$ и $\bar{\lambda} = p - iq$ у $\mathbf{x}(t)$ и добијамо израз $e^{pt}(ae^{iqt}\mathbf{u} + be^{-iqt}\bar{\mathbf{u}})$. Како се ради о реалном систему овај облик се заправо своди на $e^{pt}(a\cos(qt) + b\sin(qt))$. Равнотежа система је асимптотски стабилна ако $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ када $t \to \infty$. Овако долазимо до кључног критеријума стабилности равнотеже:

[1] детаљнија анализа система линеарних диференцијалних једначина доступна нпр. у [5]

1. Равнотежни положај неког механичког система је асимптотски стабилан ако све сопствене вредности матрице A која се добија његовом линеаризацијом у околини тог положаја имају негативан реалан део:

$$Re(\lambda_i) < 0, \forall\, i = 1, \cdots, n$$

2. Равнотежни положај је нестабилан ако бар једна сопствена вредност има позитиван реалан део:

$$Re(\lambda_i) > 0, \text{ за неко } i,\ 1 \leq i \leq n$$

3. Ако постоји једно или више λ_i тако да је $Re(\lambda_i) = 0$, док све остале сопствене вредности имају негативан реалан део, систем је стабилан по Љапунову, али не мора бити асимптотски стабилан.

Једноставним развијањем карактеристичног полинома добијамо да је потребно проверити када нуле тог полинома имају негативан реалан део. Овај услов, иако елементарно формулисан, није нимало лако проверити за полиноме великог степена чије нуле не можемо експлицитно наћи. У овом раду представљамо два критеријума за проверу овог услова.

5.1 Први критеријум

Овде представљамо критеријум стабилности који је значајно лакши за доказ од следећег, а притом се позивамо на рад [10].

Теорема 5.1. Нека је

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - z_j)$$

полином са реалним коефицијентима. Све нуле овог полинома имају негативан реалан део ако и само ако полином $f(x)$ и полином

$$g(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - z_i - z_j)$$

имају све коефицијенте позитивне.
Доказ:($\Rightarrow$) Како $f(x)$ има реалне коефицијенте можемо упарити конјуговане нуле

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2,$$

где је $z = \alpha + i\beta, \bar{z} = \alpha - i\beta$ и записати $f(x)$ у облику

$$f(x) = \prod_i (x + c_i) \prod_j (x^2 + 2a_j x + b_j)$$

где су $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}^+$ по Вијетовим формулама, па $f(x)$ очито има ненегативне коефицијенте. Али исти поступак можемо применити и на $g(x)$ пошто и његове нуле морају имати негативан реалан део. Дакле, један смер доказа је завршен.
($\Leftarrow$) Како $f(x)$ и $g(x)$ имају позитивне коефицијенте очито не могу имати позитивне реалне корене. Али ако неки корен z полинома $f(x)$ има позитиван реалан део и ненула имагинаран део тада су и z и $\bar{z}$ корени $f(x)$ па је $z + \bar{z}$ корен $g(x)$,а уједно и позитиван реалан број. Контрадикција! $\square$
Познато је да су коефицијенти полинома $f(x)$ управо Њутнове симетричне суме корена, али показује се да су и коефицијенти полинома $g(x)$ такође симетрични по коренима па се могу изразити преко коефицијената полинома $f(x)$.

Задатак 1. Наћи пример полинома са позитивним коефицијентима који има нулу са позитивним реалним делом.

Решење 1. Полином $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 4x + 5) = (x-1-2i)(x-1+2i)(x+2+i)(x+2-i)$ очито има позитивне коефицијенте, али има и нулу $1+2i$ која има позитиван реалан део. Дакле, други услов је заиста неопходан.

5.2 Други критеријум

Нека је

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - z_j)$$

моничан полином са реалним коефицијентима. Нека је полиному $f(x)$ додељена матрица

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0\cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

где за $m > n$ важи $a_m = 0$. Ова матрица се зове Хурвицова матрица полинома. Нека су главни минори ове матрице :

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Моничан реалан полином чије све нуле имају негативан реалан део зовемо Хурвицовим полиномом. Испоставља се да су минори Хурвицове матрице врло корисни при провери знака реалних делова нула неког полинома уз помоћ следеће теореме:

Теорема 5.2. (Раут[2]-Хурвиц[3]) Све нуле полинома $f(x)$ имају негативан реалан део ако и само ако су сви главни минори његове Хурвицове матрице позитивни:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0 \quad \cdots \quad \Delta_n > 0$$

Овде представљамо наш доказ који се ослања на радове [2] и [3]. Оригинални Хурвицов доказ доступан је, на пример, у [9] .
Доказ: Ако је $f(x)$ Хурвицов, онда сви његови корени леже унутар неког полукруга довољно великог полупречника $\Phi = \{z : Re(z) \leq 0 \cap |z| \leq R\}$. Полином $f^*(z)$ уводимо као :

$$f^*(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = (-1)^n f(-z)$$

и нека је полином $F_0(z)$ степена $n+1$ дефинисан са:

$$F_0(z) = (z + c) f(z)$$

где је c нека позитивна константа. Полином $F_0(z)$ је Хурвицов ако и само ако је $f(z)$ Хурвицов јер поред корена $f(z)$ има још и негативан реалан корен $-c$. Посматрајмо сада фамилију полинома

$$F_\mu(x) = (z + c) f(z) + \mu z f^*(z)$$

где се параметар μ мења од 0 до 1.

Лема 5.1. Полином $F_1(x) = (z + c) f(z) + z f^*(z)$ је Хурвицов ако и само ако је $f(z)$ Хурвицов.
Доказ: Претпоставимо да је тачно један од $F_1(z)$ и $F_0(z)$(а самим тим и $f(z)$) Хурвицов. Очито се непрекидним мењањем параметра μ од 0 до 1 нуле одговарајућих полинома F_μ непрекидно крећу по комплексној равни. Како се бар

[2]Edward John Routh(1831-1907)
[3]Adolf Hurwtiz(1859-1919)

једна нула налази са различитих страна Φ на почетку и на крају интервала , због непрекидности и затворености контуре Φ мора постојати $F_\mu(x)$ чија нула лежи баш на контури. Размотримо прво случај да та нула има модул $|z| = R$. Како је водећи коефицијент овог полинома $1+\mu$, а и сви други коефицијенти c_i се могу одозго ограничити неком константом C по апсолутној вредности, имамо

$$(1+\mu)R^n = |(1+\mu)z^n| = |c_{n-1}z^{n-1}+c_{n-2}z^{n-2}+\cdots| \leq |C|(1+|z|+\cdots+|z|^{n-1}) = |C|\frac{R^n-1}{R-1}$$

За довољно велико R ова неједнакост очито није тачна. Дакле, остаје могућност да је корен на имагинарној оси. Нека је $z = ib, b \in \mathbb{R}$. Нека је

$$f(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdots(x-r_k)(x-\xi_1)(x-\bar{\xi_1})(x-\xi_2)(x-\bar{\xi_2})\cdots(x-\xi_l)(x-\bar{\xi_l})$$

где су r_i реалне, а ξ_i комплексне нуле.
Како је $|ib-r_i| = |-ib-r_i|$, а $|(ib-\xi_i)(ib-\bar{\xi_i})| = |(-ib-\xi_i)(-ib-\bar{\xi_i})|$, закључујемо

$$|f(ib)| = |f^*(ib)|$$

Како је $F_\mu(z) = 0$ имамо:

$$(z+c)f(z) = -\mu z f^*(z)$$

$$|(z+c)f(z)| = |-\mu z f^*(z)|$$
$$|(z+c)||f(z)| = |\mu z||f^*(z)|$$
$$\sqrt{b^2+c^2} = \mu|b|$$
$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{1}{\mu}$$

Последња једнакост очито није могућа уз услов $0 \leq \mu \leq 1$. □
Остатак доказа изводимо индукцијом по степену полинома. За полиноме степена 1 тврђење је очигледно јер је једини корен $-a_1$. Претпоставимо да је тврђење тачно за све моничне полиноме степена n. Доказаћемо да је тачно за све моничне полиноме степена $n+1$.
За почетак ћемо показати да се сваки моничан Хурвицов полином степена $n+1$ може представити као

$$F(z) = \frac{(z+c)f(z) + zf^*(z)}{2}$$

где је $f(z)$ моничан полином степена n, а c позитивна константа.

Нека је

$$F(x) = x^{n+1} + b_1 x^n + \cdots + b_{n+1},$$

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Добијамо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}
&2b_1 = c\\
&2b_2 = ca_1 + 2a_2\\
&2b_3 = ca_2\\
&\vdots\\
&2b_n = a_n(1 + (-1)^n) + ca_{n-1}\\
&2b_{n+1} = ca_n
\end{aligned}$$

Приметимо да је $-b_1$ збир свих нула почетног полинома, па је он сигурно негативан реалан број. Самим тим, c мора бити позитиван. Једначине облика

$$2b_{2i+1} = ca_{2i}$$

јединствено одређују a_{2i}, па се уврштавањем a_{2i} у једначине облика

$$2b_{2i} = ca_{2i-1} + 2a_{2i}$$

на јединствен начин одређују a_{2i-1}. Једина потенцијална нејединственост се може десити код последње једначине. У овом случају раздвајамо на две могућности у зависности од парности n.

1. $2|n$
   Тада се a_{n-1} појављује само у једначини

   $$2b_n = a_n(1 + (-1)^n) + ca_{n-1}$$

   па је оно јединствено одређено због

   $$2b_{n+1} = ca_n$$

2. $2 \nmid n$
   Тада имамо

   $$2b_n = ca_{n-1}$$

   $$2b_{n+1} = ca_n$$

Одавде јединствено одређујемо последња два коефицијента, а из њих и преосталих једначина лако одређујемо остале.
Дакле, јединствено смо одредили све коефицијенте полинома $f(x)$. Из Леме **4.1** полином $F(z)$ је Хурвицов ако и само ако је $f(z)$ Хурвицов. Дакле, из претпоставке да је $F(z)$ Хурвицов добијамо да је $f(z)$ Хурвицов, па су по индуктивној хипотези главни минори Хурвицове матрице полинома $f(z)$ позитивни. Посматрајмо сада главне миноре Хурвицове матрице за полином $F(z)$. Стављајући $a = \frac{c}{2}$ добијамо:

$$D_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \cdots \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ aa_2 & aa_1 + a_2 & a & 1 & \cdots \\ aa_4 & aa_3 + a_4 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix}$$

Извлачењем фактора a из непарних колона, после чега се од парних колона одузима она испред ње, да би се на крају и из парних колона извукао фактор a добијамо:

$$D_k = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & aa_1 + a_2 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & aa_3 + a_4 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & aa_1 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & aa_3 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & a_3 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$D_k = a^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & a_3 & aa_2 & a_1 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = a^k \Delta_{k-1}$$

По индуктивној хипотези, сви Δ_i су позитивни, па су и сви D_i позитивни(први минор је баш a). Дакле, један смер је показан. Али у другом смеру знамо да су сви минори, па и први, позитивни. Дакле, $2b_1 > 0$. Самим тим и c из система је веће од нуле, па из чињенице да је $f(z)$ Хурвицов(а он то јесте јер су му по претходном минори позитивни, а важи индуктивна хипотеза) добијамо и да је $F(z)$ Хурвицов. Дакле, оба смера су показана и доказ је завршен. $\square$

Задатак 2. Описати све моничне Хурвицове полиноме трећег степена.

Решење 2. Посматрајмо Хурвицову матрицу полинома $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

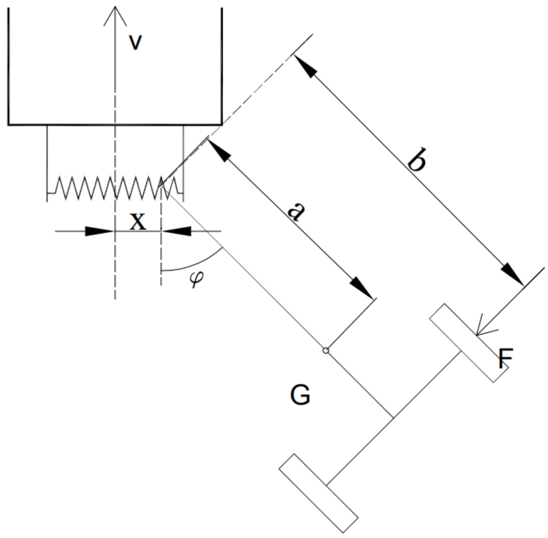
Њени минори су редом:
$\Delta_1 = a$
$\Delta_2 = ab - c$
$\Delta_3 = c(ab - c)$.
Дакле, полином $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ је Хурвицов ако и само ако је:

$$a, c > 0 \text{ и } b > \tfrac{c}{a}$$

5.3 Примене Раут-Хурвицовог критеријума

На крају овог матурског рада показаћемо колико је Хурвицов критеријум заиста користан у решавању разних проблема из механике.

Задатак 3. На слици 5.1 је дата шема вагона који може да се креће по шинама брзином v са чије задње стране са налази опруга коефицијента еластичности k. За слободан крај опруге везана је једноосна приколица масе m. Нека је G центар масе приколице, а J поларни момент инерције приколице у односу на G. Написати једначине кретања и одредити услове асимтотске стабилности система.



Слика 5.1

Решење 3. За почетак написаћемо једначину ротације приколице око G :

$$J\ddot{\varphi} = -cax\cos\varphi + F(b-a) \tag{5.1}$$

и други Њутнов закон за приколицу у правцу паралелном опрузи:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + a\sin\varphi) = -cx - F\cos\varphi \tag{5.2}$$

У апроксимацији малих углова добијамо следећи линеарни систем:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= -cax + F(b-a) \\ m\ddot{x} + m\ddot{\varphi} &= -cx - F \end{aligned}$$

Елиминацијом F из овог система добијамо једначину:

$$m(b-a)\ddot{x} + cbx + (ma(b-a) - J)\ddot{\varphi} = 0 \tag{5.3}$$

Ово је једна једначина са два степена слободе, дакле потребна нам је бар још једна веза да бисмо могли да решимо једначину. Посматрајмо тачку на средини осовине. Како је осовина круто тело, пројекција брзине те тачке на правац осовине мора бити иста као пројекција брзине центра масе точка на правац осовине. Али како при ротацији точка брзина центра масе точка остаје ортогонална на правац осовине:

$$\dot{x}\cos\varphi + b\dot{\varphi} + v\sin\varphi = 0 \tag{5.4}$$

После линеаризације добијамо:

$$\dot{x} + b\dot{\varphi} + v\varphi = 0$$

Сада имамо три једначине, али још увек немамо канонски облик система диференцијалних једначина који нам је потребан да бисмо применили Раут-Хурвицов критеријум. За то уводимо смену $\dot{x} = u$. Диференцирањем једначине (2) по времену добијамо

$$\ddot{\varphi} = \frac{-1}{b}(\ddot{x} + v\dot{\varphi})$$

Уврштавањем овог израза у једначину (1) добијамо следећи систем:

$$m(b-a)\ddot{x} + cbx - \frac{(ma(b-a) - J)}{b}(\ddot{x} + v\dot{\varphi}) = 0$$

$$\dot{x} + b\dot{\varphi} + v\varphi = 0$$

Да бисмо овај систем свели на линеарни систем диференцијалних једначина са три степена слободе уводимо смену $\dot{x} = y$ и добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= \frac{b}{m(b-a)^2 + J}\left(\frac{(J - ma(b-a))v}{b^2}(y + v\varphi) - cbx\right) \\
\dot{\varphi} &= \frac{-1}{b}(y + v\varphi)
\end{aligned}$$

Добили смо канонски облик линеарне диференцијалне једначине. Њему одговара следећа 3×3 матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-cb^2}{m(b-a)^2+J} & \frac{(J-ma(b-a))v}{b(m(b-a)^2+J)} & \frac{(J-ma(b-a))v^2}{b(m(b-a)^2+J)} \\ 0 & \frac{-1}{b} & \frac{-v}{b} \end{bmatrix}$$

За карактеристични полином ове матрице добијамо :

$$det(A - \lambda I) = P(\lambda) =$$
$$= (m(b-a)^2 + J)\lambda^3 + mv(b-a)\lambda^2 + cb^2\lambda + cbv$$

Дакле, ово је полином на који примењујемо Хурвицов критеријум. Хурвицова матрица овог полинома изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} \frac{mv(b-a)}{m(b-a)^2+J} & 1 & 0 \\ \frac{cbv}{m(b-a)^2+J} & \frac{cb^2}{m(b-a)^2+J} & \frac{mv(b-a)}{m(b-a)^2+J} \\ 0 & 0 & \frac{cbv}{m(b-a)^2+J} \end{bmatrix}$$

По **Задатку 2** знамо да је полином трећег степена Хурвицов ако и само ако су $\frac{mv(b-a)}{m(b-a)^2+J}$ и $\frac{cbv}{m(b-a)^2+J}$ позитивни што је очито тачно и ако важи

$$\frac{cb^2}{m(b-a)^2+J} > \frac{cbv}{mv(b-a)}$$

што се након скраћивања своди на

$$J < ma(b-a)$$

Дакле, нашли смо услов за асимптотску стабилност овог система. Физички смисао овог услова је да центар масе мора бити ближе споју од саме осовине($b > a$) и да точкови приколице не смеју бити превише удаљени од централне осе(услов ограничености момента инерције).

Задатак 4. **Гирокомпас** је немагнетни компас који користи ротацију Земље да одреди географски положај и значајно је практичнији од магнетног компаса. Испоставља се да се кретање гирокомпаса може описати двема диференцијалним једначинама другог реда:

$$\ddot{x_1} + 2b_1\dot{x_1} + (\nu^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x_2} = X_1$$

$$\ddot{x_2} + 2b_2\dot{x_2} + (\nu^2 - \Omega^2)x_2 + 2\Omega\dot{x_1} = X_2$$

где је x_1 величина сразмерна углу отклона од равни меридијана, x_2 варијација конструктивног угла [4], $b_1, b_2 > 0$ карактеристични коефицијенти дисипативних

[4] Појам везан за динамику гироскопа

сила, $\nu = \sqrt{\frac{g}{R_{zemlje}}} = 0.00125\, s^{-1}$, $\Omega = U \sin\varphi$, $U = 7.29 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ - фреквенција ротације Земље, φ-географска ширина, а X_1, X_2 чланови степена већег од 1 по x_1 и x_2.

Решење 4. Након линеаризације система можемо узети $X_1 = X_2 = 0$, па истим поступком као у претходном задатку налазимо карактеристични полином матрице која описује ову диференцијалну једначину. Како овде имамо фазни простор димензије 4 , наш полином ће бити степена 4 и он изгледа овако:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2(b_1 + b_2)\lambda^3 + 2(\nu^2 - \Omega^2 + b_1 b_2 + 2\Omega^2)\lambda^2 +$$

$$+2(b_1 + b_2)(\nu^2 - \Omega^2)\lambda + (\nu^2 - \Omega^2)^2 = 0$$

Прва два минора Хурвицове матрице су очигледно позитивни, а развијањем по првој врсти добијамо да трећи минор изгледа овако:

$$\Delta_3 = 8(b_1 + b_2)^2(\nu^2 - \Omega^2 + b_1 b_2 + 2\Omega^2)(\nu^2 - \Omega^2) -$$

$$-4(b_1 + b_2)^2 - 4(b_1 + b_2)^2(\nu^2 - \Omega^2)^2$$

$$= 4(b_1 + b_2)^2(\nu^2 - \Omega^2)(b_1 b_2 + \Omega^2)$$

Како је $\Delta_4 = (\nu^2 - \Omega^2)^2 \Delta_3$, $\Delta_3 > 0$ је потребан и довољан услов за асимптотску стабилност. Дакле, систем је стабилан ако и само ако је:

$$\nu > \Omega$$

Дакле, како је ν много веће од U, систем гирокомпаса је увек стабилан.

6

Закључак

У овом раду смо разматрали услове стабилности решења линеарних диференцијалних једначина и представили доказ Раут-Хурвицовог критеријума. Испоставља се да, ако линеаризацијом произвољног система добијемо линеаран систем чије решење задовољава Хурвицов критеријум, тада је и решење нелинеарног система асимптотски стабилно. Слично, ако карактеристични полином има бар један корен са позитивним реалним делом, ни решење нелинеарног система сигурно није стабилно. Остаје једино случај када имамо корене са негативним реалним делом и чисто имагинарне корене. Тада не можемо са сигурношћу тврдити како ће се понашати нелинеарни систем. У неким случајевима ту нам може помоћи Љапунов-Малкинова теорема, којом се нисмо бавили у овом раду.

Желео бих овом приликом да се захвалим свом ментору др Бориславу Гајићу на свесрдној помоћи при савладавању градива као и мојој мами Љиљани на помоћи при изради дијаграма у софтверу AutoCAD.

Литература

[1] V.I.Arnold, *Ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge, MA, 1973.

[2] В. Панић, *Стабилност стационарних кретања крутих тела на површи и динамика келтског камена*, Мастер рад, Универзитет у Београду.

[3] Н.Г. Четаев, *Устойчивость движения*, Гостехиздат, 1946

[4] Э .Б.Винберг, *Курс алгебры* , Издательство МЦНМО , 2019.

[5] Д.Р.Меркин, С.М.Бауэр, А.Л.Смирнов, *Задачи по теории устойчивости* , Институт компьютерных исследований, Москва, 2002.

[6] Србољуб Симић: *Аналитичка механика: динамика, стабилност, бифуркације*, ФТН Нови Сад, 2006

[7] Routh, E.J. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion*, Macmillan and co., 1877

[9] Hurwitz, A. *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.* Math. Ann. 46, 273–284 (1895).

[10] Strelitz, SH.: *On the Routh-Hurwitz Problem, American Mathematical Monthly*, 84(7), 1977, 542-544